



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIDA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a IX-a

Subiectul 1 (7 puncte)

1. Să se determine minimul expresiei: $E(x) = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2024|$, precum și valorile reale ale lui x pentru care se realizează acest minim.
2. Să se determine minimul expresiei: $E(x) = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2024| + |x - 2025|$, precum și valorile reale ale lui x pentru care se realizează acest minim.

Subiectul 2 (7 puncte)

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\left[\frac{3x+1}{2} \right] + \left[\frac{9x+5}{6} \right] + \left[\frac{9x+7}{6} \right] = \frac{7x+5}{2},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

Subiectul 3 (7 puncte)

Demonstrați că pentru orice $a, b, c > 0$ are loc inegalitatea

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2$$

Subiectul 4 (7 puncte)

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ și $\vec{h}_A, \vec{h}_B, \vec{h}_C$, vectorii corespunzători înălțimilor din A, B respectiv C . Să se arate că:

$$a^2 \cdot \vec{h}_A + b^2 \cdot \vec{h}_B + c^2 \cdot \vec{h}_C = \vec{0}.$$

Timp de lucru 3 ore după primirea subiectelor.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a X-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se determine toate perechile ordonate $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $x^{2024} + y^{2024} \geq 1$
și $\sqrt[2024]{|x|} + \sqrt[2024]{|y|} \leq 1$.

Subiectul 2 (7 puncte)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și x_1, x_2, \dots, x_n numere reale astfel încât $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$
Să se arate că $2x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + 2x_n^2 \geq 2n$.

Subiectul 3 (7 puncte)

Fie $a, b \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|a| = |b| = |a - b|$ și $z = \frac{a}{b}$.

Să se demonstreze că:

- i) $|z| = 1$ și $z \notin \{-1, 1\}$.
- ii) Determinați mulțimea $\{z^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Subiectul 4 (7 puncte)

Demonstrați că funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = \log_{n+1} n$ este strict crescătoare.

Timp de lucru 3 ore după primirea subiectelor.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală 10.02.2024

Județul Buzău

CLASA a XI-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

- a) Arătați că $A = B \cdot C \cdot B^{-1}$, unde B^{-1} este inversa matricii B .
b) Calculați A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 2 (7 puncte)

- a) Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$. Arătați că $A^4 + A^2 + I_2 = O_2$ dacă și numai dacă $A^2 - A + I_2 = O_2$ sau $A^2 + A + I_2 = O_2$.
b) Dați un exemplu de o matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A^4 + A^2 + I_2 = O_2$, $A^2 - A + I_2 \neq O_2$ și $A^2 + A + I_2 \neq O_2$.

Subiectul 3 (7 puncte)

Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[5]{x+31}}$

Subiectul 4 (7 puncte)

Să se studieze convergența șirului $(a_n)_{n \geq 0}$, cu $a_0 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{2a_n + 3}{a_n + 2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și în caz de convergență determinați-i limita.

Timp de lucru 3 ore după primirea subiectelor.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a XII-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Determinați primitiva $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = (x + 1)^2 \cdot e^{x - \frac{1}{x}}$, cu proprietatea că $F(1) = 2024$.

Subiectul 2 (7 puncte)

- a) Să se arate că $\forall x, y, z \in [0, 1)$ avem $\{\{x + y\} + z\} = \{x + y + z\}$,
- b) Pe mulțimea $G = [0, 1)$ se definește legea de compoziție $x * y = \{x + y\}$,
unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real a .
Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.
- c) Să se rezolve în $(G, *)$ ecuația $x * x * x = \frac{3}{4}$.

Subiectul 3 (7 puncte)

Considerăm (S_4, \cdot) grupul permutărilor de gradul 4.

- a) Fie H un subgrup propriu al lui S_4 . Determinați numărul maxim de elemente din H .
- b) Fie $M = \{x \in S_4 | x^2 = e\}$. Demonstrați că M nu este subgrup al grupului (S_4, \cdot) .

Subiectul 4 (7 puncte)

Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea:

$$x^2 \cdot f'(x) + xf(x) = 1, \quad \forall x > 0 \text{ și } f(1) = 0.$$

- a) Arătați că f admite primitive și determinați o primitivă F , a lui f dacă $F(1) = 0$.
- b) Calculați $\int_1^e \frac{F(x)}{x} dx$.

Timp de lucru 3 ore după primirea subiectelor.